

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2023-2024

Esame scritto del 23.01.2024

Parte 1 - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

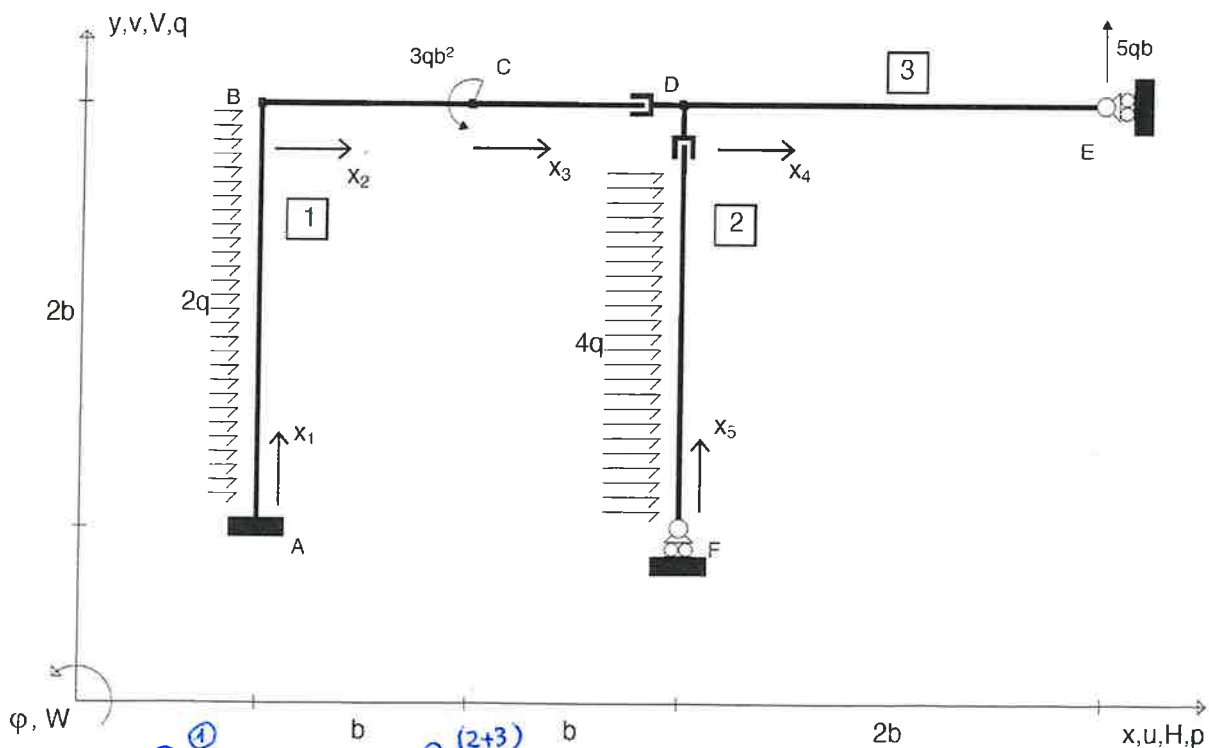
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le *equazioni* delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

L'Università di Cagliari

SdC_SdA 23.01.24*001



Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_E applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine in A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto A , v_A , e quella orizzontale dello spostamento virtuale del punto C , u_C .

Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto B , M_B .

In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste AB , BC , CDE) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto A , v_A , e quella orizzontale dello spostamento virtuale del punto C , u_C .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Università di Cagliari

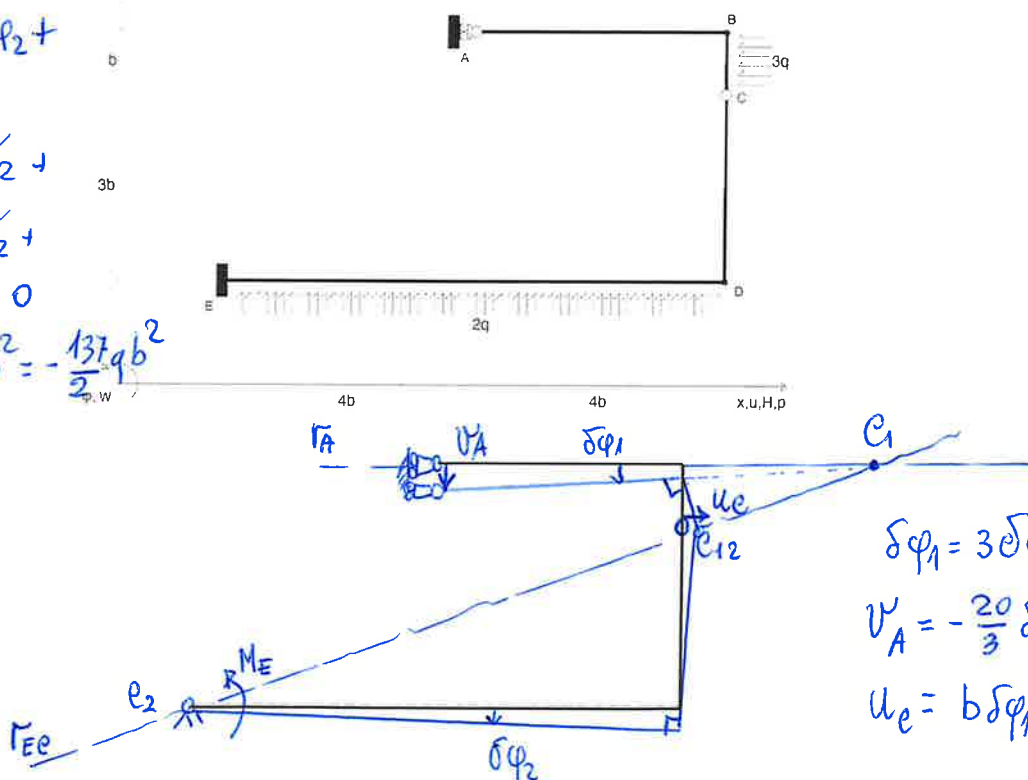
SdC_SdA 23.01.24*004

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L} &= -\frac{3}{2}qb \cdot \frac{b}{2}\delta\varphi_1 + \\ &- 16qb \cdot 4b\delta\varphi_2 + \\ &- M_E\delta\varphi_2 \\ &= -\frac{9}{2}qb^2\delta\varphi_1 + \\ &- 64qb^2\delta\varphi_2 + \\ &- M_E\delta\varphi_2 = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_E = -\frac{9}{2}qb^2 - 64qb^2 = -\frac{137}{2}qb^2$$

$$C_1 \in r_A$$

$$C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2$$



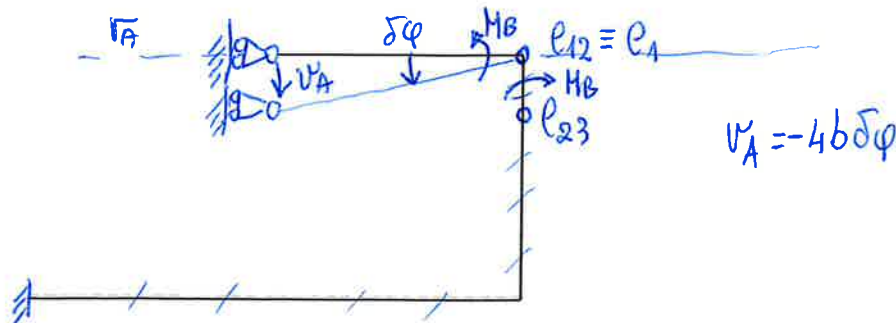
$$\delta\varphi_1 = 3\delta\varphi_2$$

$$v_A = -\frac{20}{3}\delta\varphi_1$$

$$u_C = b\delta\varphi_1 = 3b\delta\varphi_2$$

$$C_1 \in r_A$$

$$C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_{23}$$



$$v_A = -4b\delta\varphi$$

$$M_E(\hat{\mathcal{A}}) = -\frac{137}{2}qb^2; C_1 = \left(\frac{206}{3}, 0\right); C_2 = (-4b, -4b); C_{12} = (4b, -b);$$

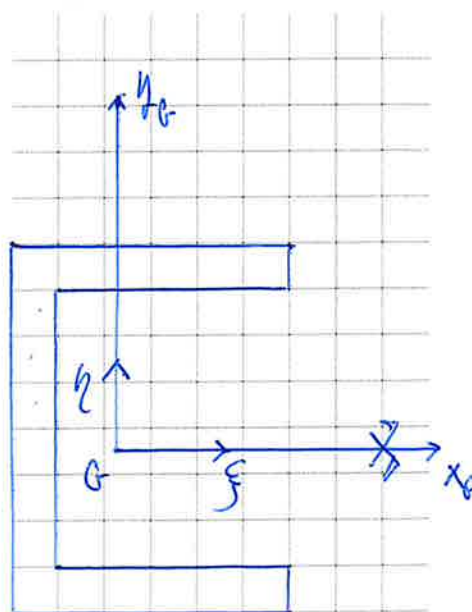
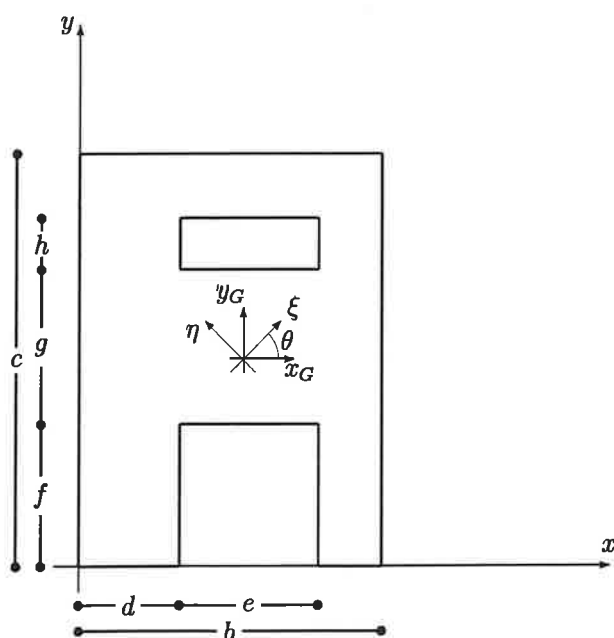
$$v_A = -\frac{20}{3}\delta q_1; u_C = b\delta q_1 = 3b\delta q_2;$$

$$M_B(\hat{\mathcal{A}}) = 0; v_A = -4b\delta q; u_C = 0;$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: *Si noti che il disegno non è in scala!*) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 6a$; $c = 7a$; $d = 1a$; $e = 5a$; $f = 0$; $g = 1a$; $h = 5a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



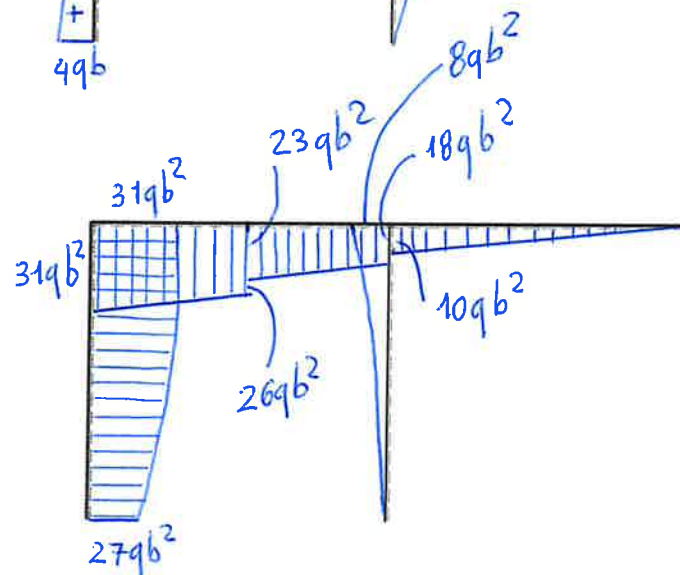
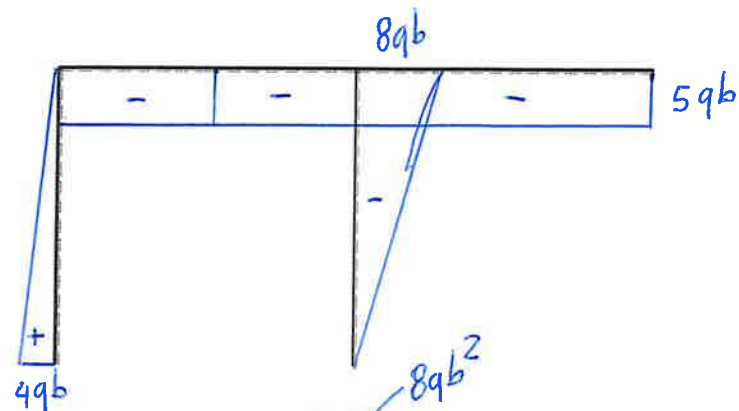
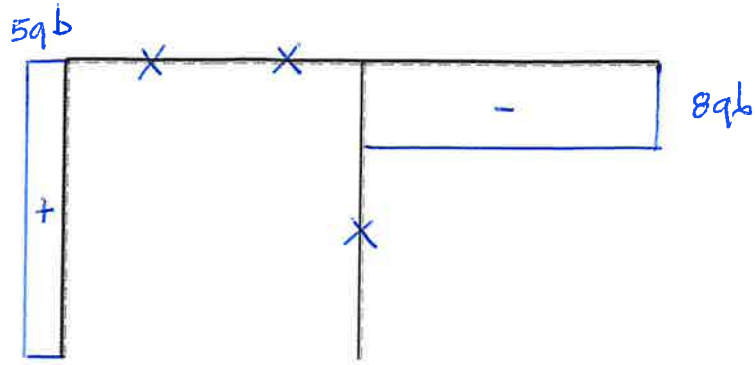
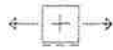
$$S_x = 119/2 a^3 = 59.5000 a^3; S_y = 77/2 a^3 = 38.5000 a^3;$$

$$x_G = 77/34 a = 2.2647 a; y_G = 7/2 a = 3.5000 a;$$

$$J_{xG} = 1433/12 a^4 = 119.4167 a^4; J_{yG} = 11929/204 a^4 = 58.4755 a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0;$$

$$J_\xi = J_{\max} = 1433/12 a^4; J_\eta = J_{\min} = 11929/204 a^4;$$



$V_A (\uparrow) = -5qb$	$H_A (\Rightarrow) = -4qb$	$M_A (\curvearrowright) = -27qb^2$	$V_F (\uparrow) = 0$	$H_E (\Rightarrow) = -8qb$
$N_{AB} = 5qb$	$T_{AB} = 4qb - 2qx_1$	$M_{AB} = 27qb^2 + 4qb x_1 - qx_1^2$		
$N_{BC} = 0$	$T_{BC} = -5qb$	$M_{BC} = 31qb^2 - 5qb x_2$		
$N_{CD} = 0$	$T_{CD} = -5qb$	$M_{CD} = 23qb^2 - 5qb x_3$		
$N_{DE} = -8qb$	$T_{DE} = -5qb$	$M_{DE} = 10qb^2 - 5qb x_4$		
$N_{FD} = 0$	$T_{FD} = -4qx_5$	$M_{FD} = -2qx_5^2$		

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2023-2024

Esame scritto del 23.01.2024

Parte 1 - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

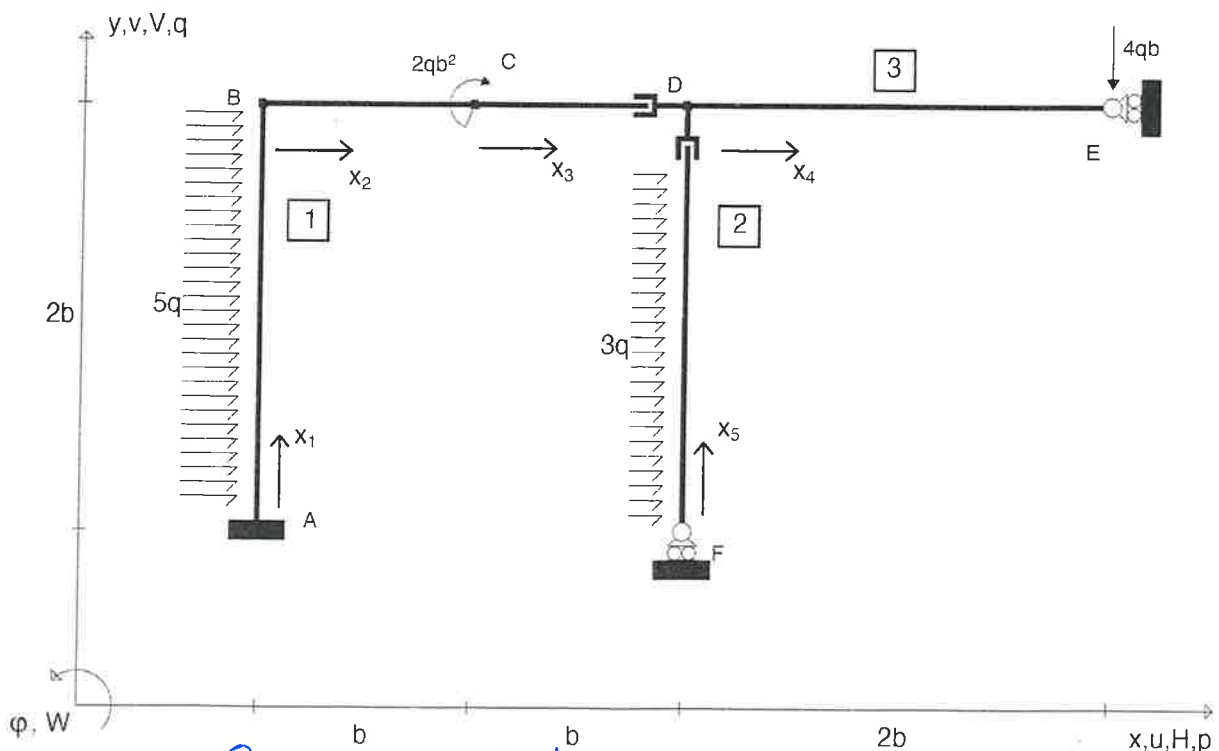
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 23.01.24*002



Equazioni
ausiliarie

$$R_x^{(1)} = 0 \quad \text{oppure} \quad R_x^{(2+3)} = 0$$

$$R_y^{(2)} = 0 \quad \text{oppure} \quad R_y^{(1+3)} = 0$$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_E applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine in A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto A , v_A , e quella orizzontale dello spostamento virtuale del punto C , u_C .

Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto B , M_B .

In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste AB , BC , CDE) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto A , v_A , e quella orizzontale dello spostamento virtuale del punto C , u_C .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Università di Cagliari

SdC_SdA 23.01.24*005

$$\delta \mathcal{L} = -8qb \cdot b \delta \varphi_1 +$$

$$-40qb \cdot 4b \delta \varphi_2$$

$$-M_E \delta \varphi_2$$

$$= -8qb^2 \delta \varphi_1 +$$

$$-160qb^2 \delta \varphi_2 +$$

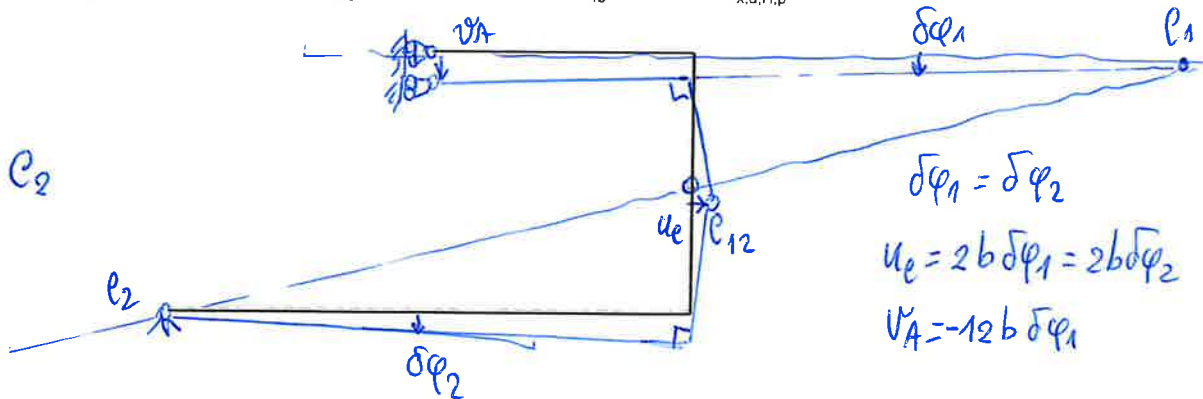
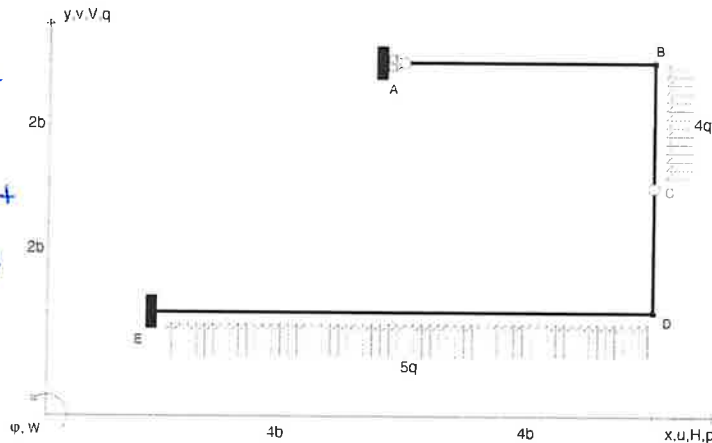
$$-M_E \delta \varphi_2 = 0$$

$$\Rightarrow M_E = -8qb^2 - 160qb^2$$

$$= -168qb^2$$

$$C_1 \in V_A$$

$$C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2$$



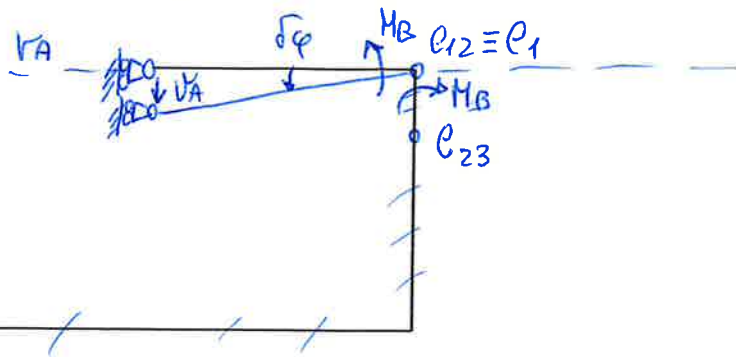
$$\delta \varphi_1 = \delta \varphi_2$$

$$u_C = 2b \delta \varphi_1 = 2b \delta \varphi_2$$

$$v_A = -12b \delta \varphi_1$$

$$C_1 \in V_A$$

$$C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_{23}$$



$$M_E(\varphi) = -168 qb^2; C_1 = \begin{pmatrix} 12b & 0 \end{pmatrix}; C_2 = \begin{pmatrix} -4b & -4b \end{pmatrix}; C_{12} = \begin{pmatrix} 4b & -2b \end{pmatrix};$$

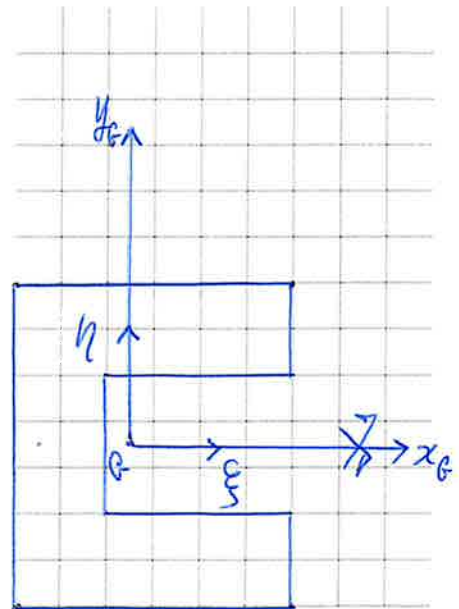
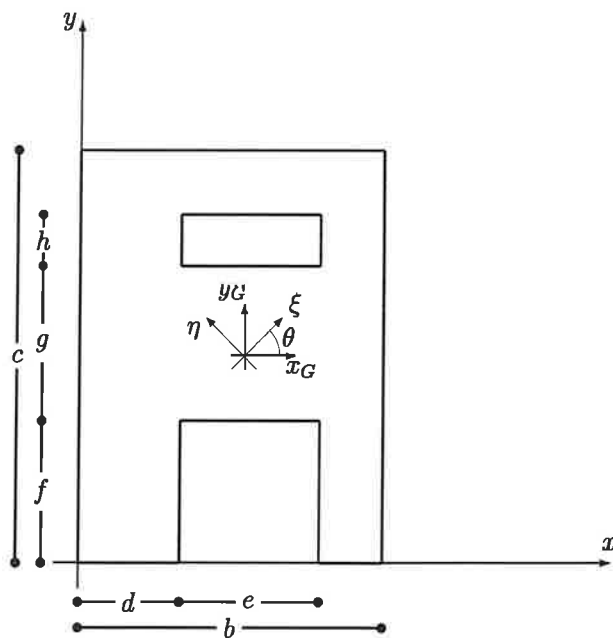
$$v_A = -12b\delta\varphi_1; u_C = 2b\delta\varphi_1 = 2b\delta\varphi_2$$

$$M_B(\varphi) = 0; v_A = -4b\delta\varphi; u_C = 0;$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 6a$; $c = 7a$; $d = 2a$; $e = 4a$; $f = 0$; $g = 2a$; $h = 3a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



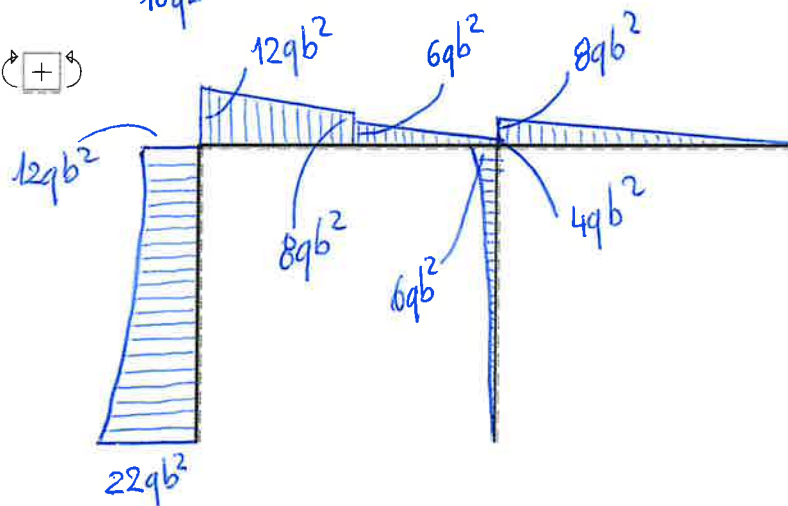
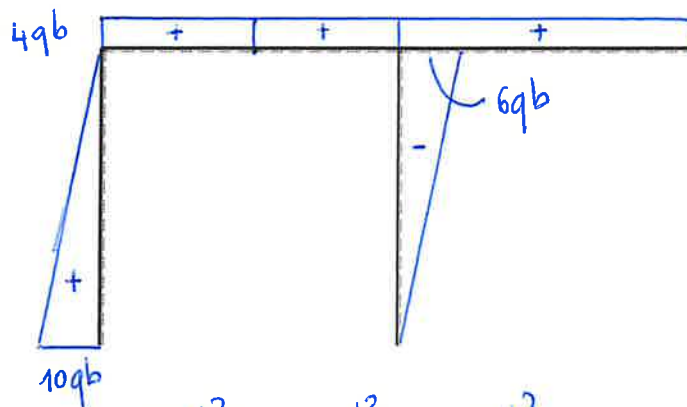
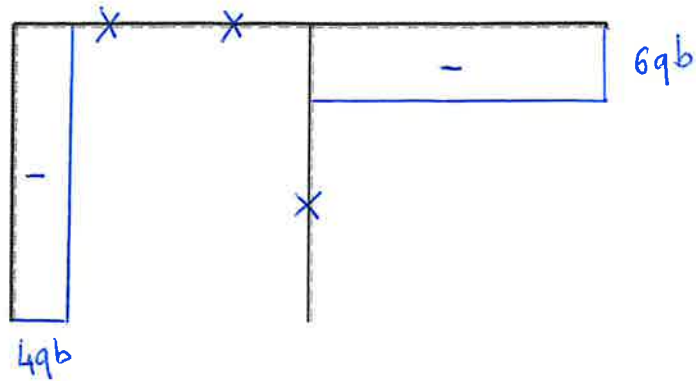
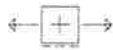
$$S_x = 105 a^3; S_y = 78 a^3;$$

$$x_G = 13/5 a = 2.6000 a; y_G = 7/2 a = 3.5000 a;$$

$$J_{xG} = 325/2 a^4 = 162.5000 a^4; J_{yG} = 466/5 a^4 = 93.2000 a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0;$$

$$J_\xi = J_{\max} = 325/2 a^4; J_\eta = J_{\min} = 466/5 a^4;$$



$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= 4qb; & H_A (\Rightarrow) &= -10qb; & M_A (\curvearrowright) &= 22qb^2; & V_F (\uparrow) &= 0; & H_E (\Rightarrow) &= -6qb; \\
 N_{AB} &= -4qb; & T_{AB} &= 10qb - 5qx_1; & M_{AB} &= -22qb^2 + 10qb x_1 - \frac{5}{2} q x_1^2; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 4qb; & M_{BC} &= -12qb^2 + 4qb x_2; \\
 N_{CD} &= 0; & T_{CD} &= 4qb; & M_{CD} &= -6qb^2 + 4qb x_3; \\
 N_{DE} &= -6qb; & T_{DE} &= 4qb; & M_{DE} &= -8qb^2 + 4qb x_4; \\
 N_{FD} &= 0; & T_{FD} &= -3qx_5; & M_{FD} &= -\frac{3}{2} q x_5^2;
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2023-2024

Esame scritto del 23.01.2024

Parte 1 - Testo 3

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

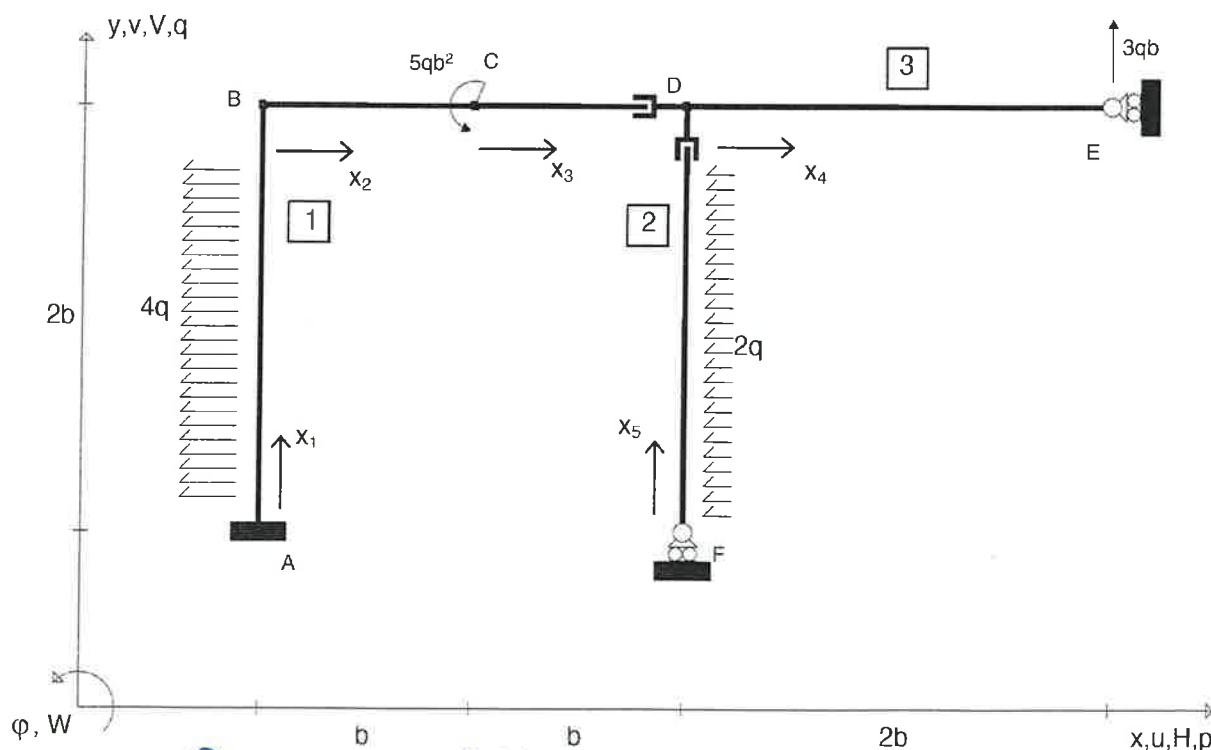
Allievo:..... e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Università' di Cagliari

SdC_SdA 23.01.24*003



Equazioni
auxiliary
 $R_x^{(1)} = 0$ oppure $R_x^{(2+3)} = 0$
 $R_y^{(2)} = 0$ oppure $R_y^{(1+3)} = 0$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_E applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine in A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto A, v_A , e quella orizzontale dello spostamento virtuale del punto C, u_C .

Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto B, M_B .

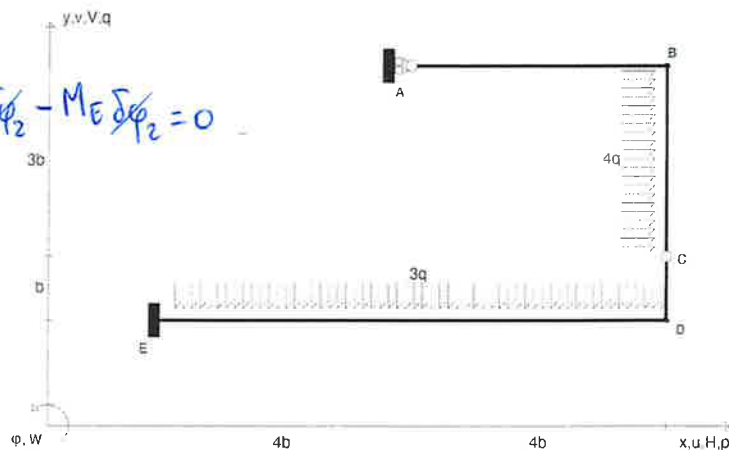
In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste AB, BC, CDE) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto A, v_A , e quella orizzontale dello spostamento virtuale del punto C, u_C .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Università di Cagliari

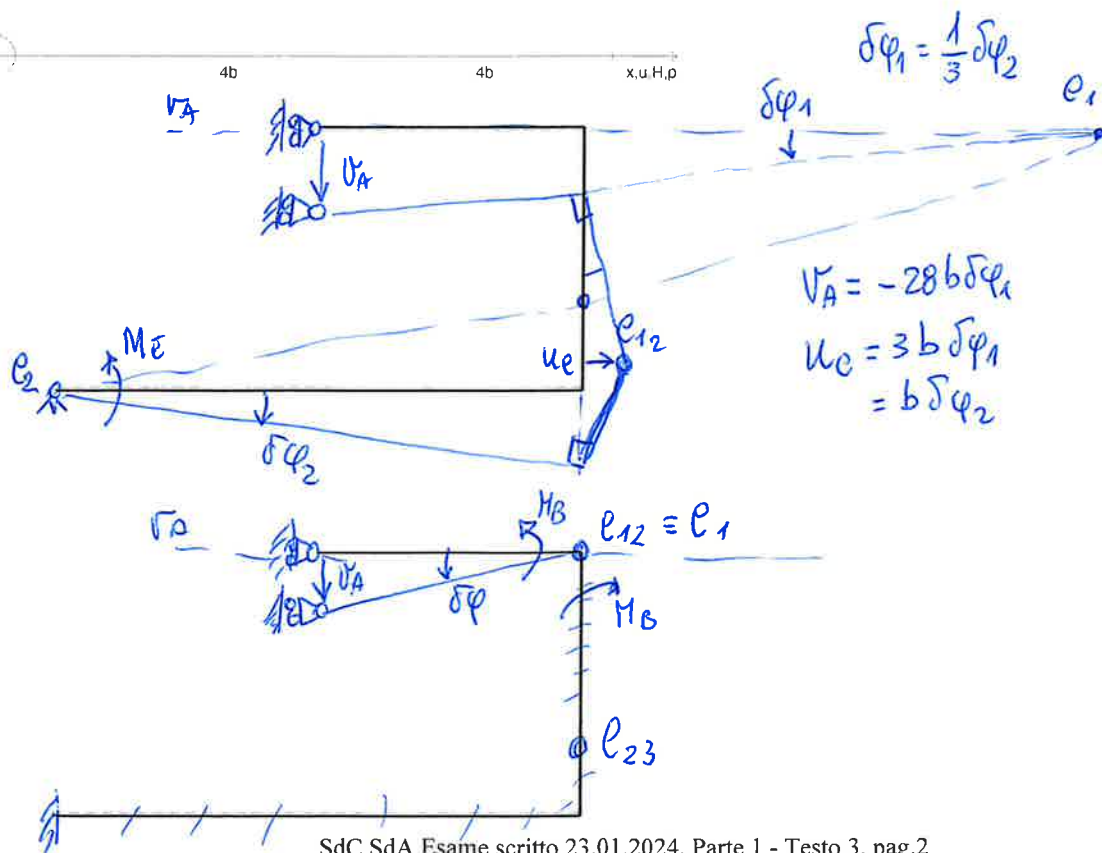
SdC_SdA 23.01.24*006



$$\begin{aligned} \delta L &= 12qb \cdot \frac{3}{2} b \delta \varphi_1 + \\ &+ 24qb \cdot 4b \delta \varphi_2 + \\ &- M_E \delta \varphi_2 \\ &= 6qb^2 \delta \varphi_1 + 96qb^2 \delta \varphi_2 - M_E \delta \varphi_2 = 0 \\ \Rightarrow M_E &= 6qb^2 + 96qb^2 \\ &= 102qb^2 \end{aligned}$$

$$e_1 \in r_A$$

$$e_1 \leftrightarrow e_{12} \leftrightarrow e_2$$



$$e_1 \in r_A$$

$$e_1 \leftrightarrow e_{12} \leftrightarrow e_{23}$$

$$M_E(\hat{\varphi}) = 10296^2; C_1 = (286, 0); C_2 = (-46, -46); C_{12} = (46, -36);$$

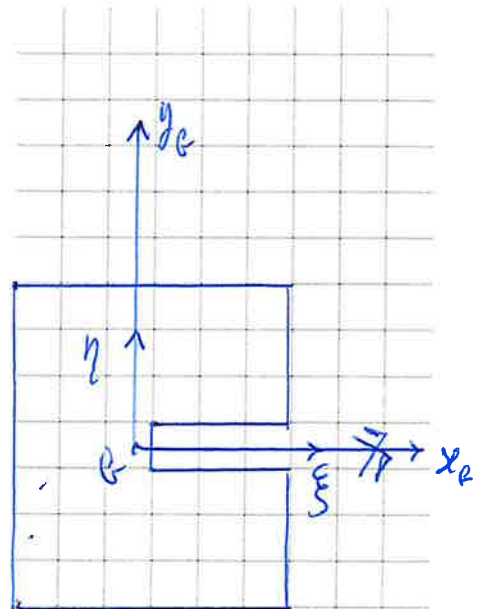
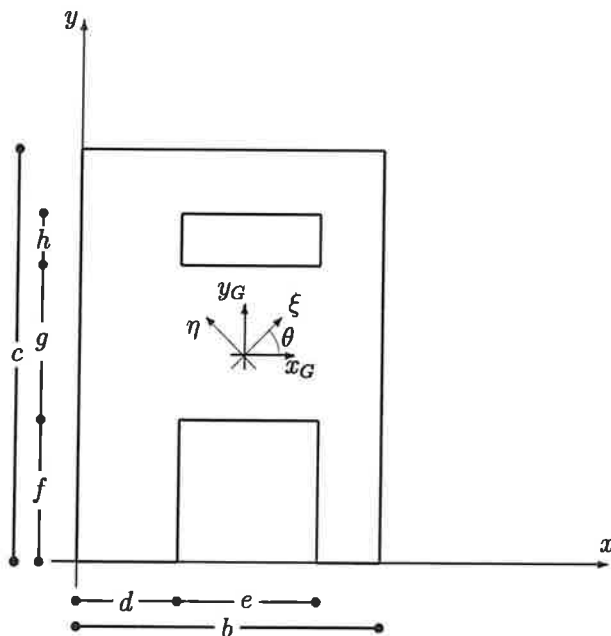
$$v_A = -286\delta q_1; u_C = 36\delta q_1 = 6\delta q_2$$

$$M_B(\hat{\varphi}) = 0; v_A = -46\delta q; u_C = 0;$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 6a$; $c = 7a$; $d = 3a$; $e = 3a$; $f = 0$; $g = 3a$; $h = 1a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



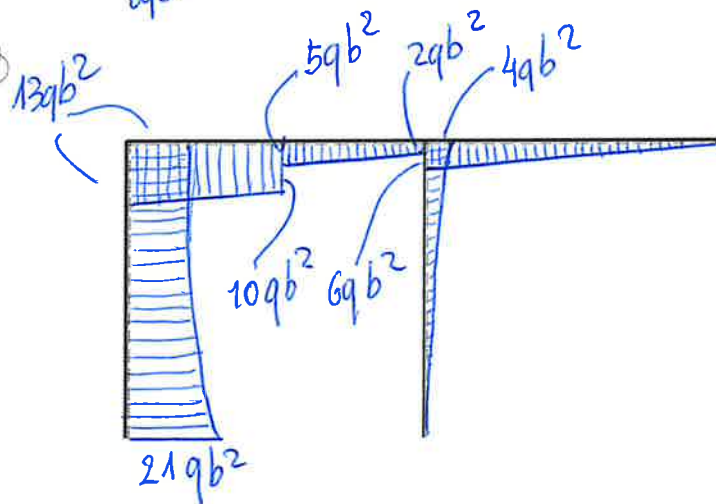
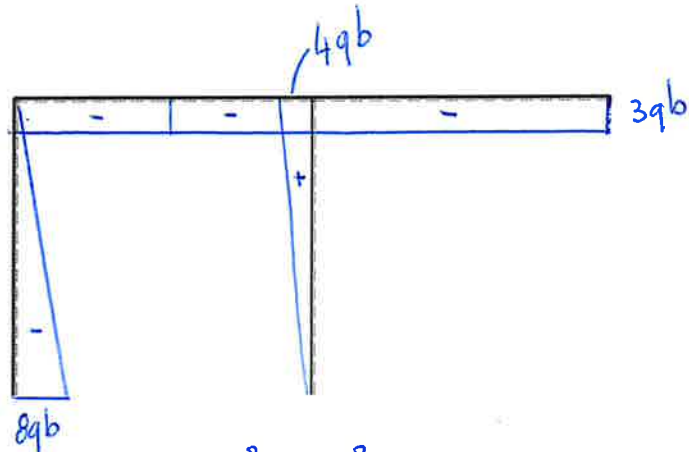
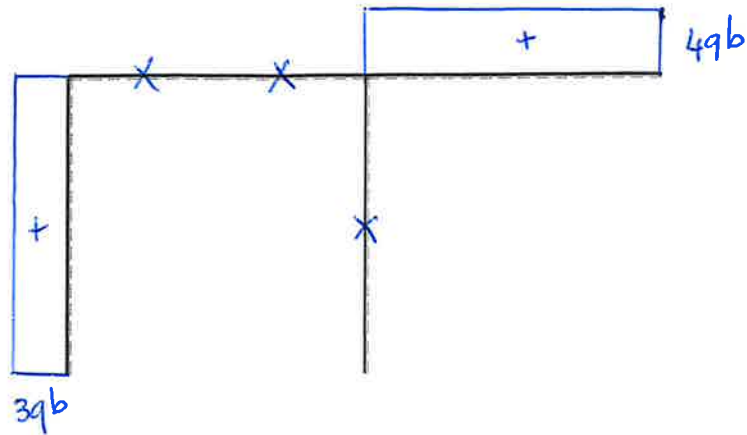
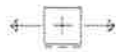
$$S_x = 273/2 a^3 = 136.5000a^3; S_y = 225/2 a^3 = 112.5000a^3;$$

$$x_G = 75/26 a = 2.8846a; y_G = 7/2 a = 3.5000a$$

$$J_{xG} = 685/4 a^4 = 171.2500a^4; J_{yG} = 6057/52 a^4 = 116.4808a^4$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0$$

$$J_\xi = J_{\max} = 685/4 a^4; J_\eta = J_{\min} = 6057/52 a^4$$



$V_A(\uparrow) = -3qb$	$H_A(\Rightarrow) = 8qb$	$M_A(\curvearrowright) = -21qb^2$	$V_F(\uparrow) = 0$	$H_E(\Rightarrow) = 4qb$
$N_{AB} = 3qb$	$T_{AB} = -8qb + 4qx_1$	$M_{AB} = 21qb^2 - 8qb x_1 + 2q x_1^2$		
$N_{BC} = 0$	$T_{BC} = -3qb$	$M_{BC} = 13qb^2 - 3qb x_2$		
$N_{CD} = 0$	$T_{CD} = -3qb$	$M_{CD} = 5qb^2 - 3qb x_3$		
$N_{DE} = 4qb$	$T_{DE} = -3qb$	$M_{DE} = 6qb^2 - 3qb x_4$		
$N_{FD} = 0$	$T_{FD} = 2qx_5$	$M_{FD} = qx_5^2$		